Olimpiada Națională de Matematică 2015
Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015
CLASA a V-a

Subiectul 1

Aflați numerele de forma $\overline{abc}$ care împărțite la $\overline{bc}$ dau câtul 4 şi restul $\overline{bc}-8$. (7p)

Subiectul 2

1. Arătați că numărul $A=6^{2015}$ se poate scrie ca diferență de două pătrate perfecte. (4p)

2. Demonstrați că numărul $B=2015+2+6+10+...+4026$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte. (3p)

Subiectul 3

Se consideră numerele $a=8^{222}-3\cdot 4^{332}-2^{663}$ şi $b=3^{500}-2\cdot 3^{499}-2\cdot 3^{498}-...-2\cdot 3^{443}-2\cdot 3^{442}$

a) Să se compare numerele a şi b. (4p)

b) Să se determine cel mai mic număr p *prim* de două cifre astfel încât $a+b+p$ să se dividă cu 10. (3p)

Subiectul 4

Considerăm tabelul format din perechile de numere naturale (7p)

$(1,1)$

$(1,2)\quad (2,1)$

$(1,3)\quad (2,2)\quad (3,1)$

$(1,4)\quad (2,3)\quad (3,2)\quad (4,1)$

.....

a) Care este perechea din mijlocul rândului al 9-lea?

b) Care este a 1000-a pereche de pe rândul 2010?

c) În câte perechi scrise de la rândul 1 până la rândul 2010 inclusiv, apare numărul 1005?

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Inspectoratul Școlar Județean
Iași

MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

Clasa a VI-a

Problema 1

Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt suplementare, iar măsura primului este de cinci ori mai mare decât măsura celui de-al doilea. Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$.

Problema 2

Mulțimea M este formată din n multipli consecutivi ai lui 4. Suma celui mai mic și celui mai mare dintre elementele lui M este 8080, iar suma celor mai mari două elemente din M este 16132.

a) Arătați că $n = 2015$.

b) Demonstrați că media aritmetică a tuturor elementelor lui M este element al mulțimii M.

Problema 3

Pe semidreapta $(OB$ se consideră punctele $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ astfel încât $OB = 2$ cm, $OA_1 = 1$ cm și $A_nA_{n+1} = \frac{1}{2^n}$ cm, oricare ar fi numărul natural nenul n.

a) Care este cea mai mare lungime posibilă a segmentului A_1A_{10} ? Dar cea mai mică?

b) Arătați că, indiferent de modul lor de așezare (în condițiile problemei), toate punctele $A_n\ (n \in \mathbb{N}^*)$ aparțin segmentului (OB).

Problema 4

Determinați numărul fracțiilor ireductibile și subunitare care au suma dintre numărător și numitor egală cu 2015.

Notă. Timp de lucru: 2 ore
Fiecare problemă se notează cu punctaje cuprinse între 0 și 7.

Inspectoratul Școlar Județean
Iași

MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a VII-a

Subiect 1

Demonstrați că media aritmetică a primelor k numere naturale pare consecutive și cea a primelor k numere naturale impare consecutive sunt numere naturale consecutive, unde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Subiect 2

a) Demonstrați că dacă m și n sunt numere raționale și $m\sqrt{3}+n\sqrt{2}=0$, atunci $m=0$ și $n=0$.

b) Arătați că $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+...+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}}=\frac{2}{3}$.

c) Determinați numerele $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{Z}$, astfel încât

$$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+...+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}}\right)\cdot a\sqrt{2}+\left[\frac{\sqrt{b^2+20}}{2}\right]\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{50}}{3}+a\sqrt{12},$$

unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului x.

Subiect 3

Se consideră un paralelogram $ABCD$ și se notează cu M, N și O mijloacele segmentelor AD, BC, respectiv AN. Fie $BP \perp CM$, $P \in CM$.

a) Demonstrați că patrulaterul $ANCM$ este paralelogram.

b) Demonstrați că $[AP] \equiv [AB]$.

c) Determinați măsura unghiului BAD, știind că $2OP = AN$.

Subiect 4

În triunghiul oarecare ABC, se consideră M și N mijloacele segmentelor BC, respectiv AM, punctul D simetricul punctului C față de A, $BN \cap AC = \{S\}, DM \cap AB = \{T\}$ și punctul P mijlocul segmentului SC.

a) Demonstrați că $AC = 3PC$.

b) Demonstrați că dreptele ST și BC sunt paralele.

c) Calculați aria triunghiului ANS, știind că aria triunghiului ABC este egală cu $48\ cm^2$.

Notă Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a VIII a

Subiect 1

a) Stabiliți dacă numărul $A=\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\frac{9}{16\cdot 25}+\frac{11}{25\cdot 36}$ aparține intervalului $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$.

b) Dacă $x, y\in R$, astfel încât $x\in(-2;6)$ și $y\in(-5;3)$, arătați că numărul

$B=\sqrt{(x+y-9)^2}+\sqrt{(x+y+7)^2}$ este pătrat perfect.

Subiect 2

a) Raționalizați fracția: $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

b) Să se determine $n\in N^*$ astfel încât:

$$\frac{\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=45.$$

Subiect 3

Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată cu $AB=6$ *cm*. Se știe că M este mijlocul lui (BB'), N este mijlocul lui (AA'), iar măsura unghiului dintre dreptele CM și $B'N$ este egală cu 60^0.

a) Calculați perimetrul triunghiului AMC.

b) Determinați distanța de la M la mijlocul segmentului (AD').

c) Să se arate că oricum am considera 9 puncte în interiorul prismei,există două dintre ele aflate la o distanță de cel mult $3\sqrt{6}$ cm unul față de celălalt.

Subiect 4

Pe muchiile $[SA_1],[SA_2],\ldots,[SA_n]$ ale piramidei $SA_1A_2\ldots A_n$ cu baza poligonul $A_1A_2\ldots A_n$ se iau respectiv punctele $B_1, B_2, \ldots, B_n$ astfel încât patrulaterele $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \ldots, A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$ să fie inscriptibile. Să se arate că și patrulaterul $A_1A_nB_nB_1$ este inscriptibil.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.